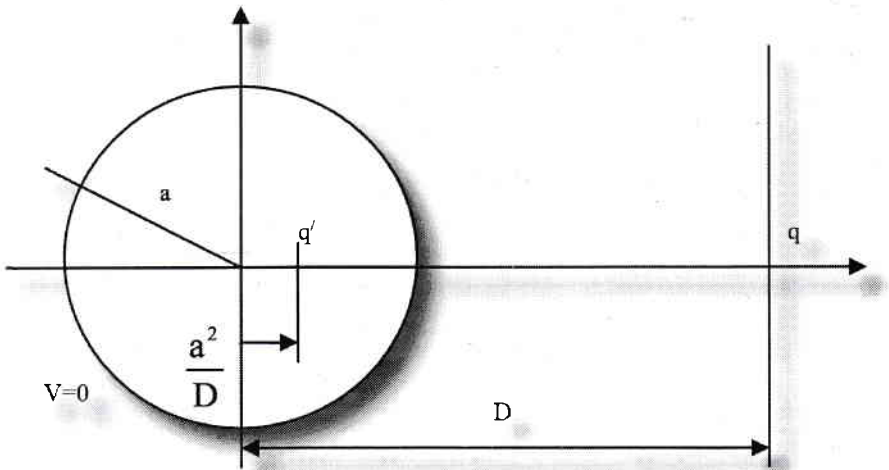


Tudor Micu

Dan Micu

Vlaicu Popescu

## Inversiunea geometrică. Transformata Kelvin. Sinteza de câmp în regim electric staționar. Aplicații.



## Cuprins

Prefață.....	8
<b>1. Introducere.....</b>	<b>9</b>
1.1. Problema analizei câmpului electromagnetic.....	9
1.2. Problema sintezei câmpului electromagnetic.....	10
1.3. Metode speciale în analiza și sinteza câmpului electric în regim static și staționar.....	11
1.4. Istoric al metodelor speciale.....	12
1.5. Stadiul actual al preocupărilor în domeniul metodelor speciale.....	12
1.6. Concluzii.....	14
<b>Bibliografie.....</b>	<b>15</b>
<b>2. Transformata Kelvin, metodă de analiză a câmpului electrostatic.....</b>	<b>18</b>
2.1. Transformata spațiului.....	18
2.1.1. Definiția inversiunii geometrice.....	18
2.1.2. Determinarea geometrică a punctului invers.....	19
2.1.3. Proprietăți ale transformării prin inversiune.....	21
2.2. Transformata sarcinii și a potențialului.....	24
2.2.1. Rezolvarea originală a imaginii sarcinii față de sferă.....	24
2.2.2. Transformata sarcinii punctiforme și a densităților de sarcină.....	27
2.2.3. Transformata potențialului.....	29
2.3. Densitatea de sarcină pe o sferă conductoare de potențial nul în prezența unei sarcini punctiforme.....	30
2.4. Concluzii.....	32
<b>Bibliografie.....</b>	<b>32</b>
<b>3. Analiza câmpului electrostatic pentru un sistem de două sfere conductoare exterioare.....</b>	<b>34</b>
3.1. Introducere.....	34
3.2. Enunțul problemei.....	36
3.3. Stabilirea configurației inverse modificate.....	36
3.4. Determinarea sarcinilor imagine primare în „configurația inversă modificată”.....	38
3.4.1. Grupul sarcinilor imagine primare „prima la stânga”.....	39
3.4.2. Grupul sarcinilor imagine primare „prima la dreapta”.....	42

3.5. Revenirea la „configurația inițială”. Determinarea sarcinilor imagine ale dispozitivului.....	43
3.5.1. Poziția și valoarea sarcinilor imagine ale dispozitivului din interiorul sferei $R_1$ .....	44
3.5.2. Poziția și valoarea sarcinilor imagine ale dispozitivului din interiorul sferei $R_2$ .....	45
3.6. Calculul potențialului sferei de rază $R_1$ cu ajutorul sarcinilor imagini ale dispozitivului.....	47
3.7. Formula capacității dispozitivului format din cele două sfere .....	49
3.8. Convergența formulelor de calcul .....	49
3.9. Algoritmul de calcul .....	50
3.10. Exemplu de calcul .....	53
3.11. Concluzii .....	55
<b>Bibliografie</b> .....	56

## 4. Analiza câmpului electrostatic pentru un sistem de două sfere

<b>conductoare care formează un unghi <math>\varphi = \frac{\pi}{n}</math></b> .....	57
4.1. Enunțul problemei .....	57
4.2. Aflarea sarcinilor imagine primare.....	58
4.3. Aflarea sarcinilor imagine ale dispozitivului .....	59
4.4. Determinarea capacității.....	62
4.5. Exemplu de calcul .....	63
4.6. Cazul sferelor tangente aflate la același potențial .....	64
4.6.1. Enunțul problemei.....	64
4.6.2. Imaginile de la dreapta polului .....	65
4.6.3. Imaginile de la stânga polului .....	65
4.6.4. Determinarea formulei capacității.....	66
4.6.5. Exemplu de calcul.....	67
4.7. Concluzii .....	68
<b>Bibliografie</b> .....	68

<b>5. Model electrostatic cu simetrie plan meridiană pentru testarea preciziei unor metode numerice</b> .....	69
5.1. Introducere .....	69
5.2. Determinarea formulei potențialului și câmpului creat de cele două sfere .....	69
5.2.1. Expresia potențialului și câmpului în cazul sferelor ortogonale .....	73
5.2.2. Expresia potențialului și câmpului în cazul sferelor egale .....	74
5.2.3. Expresia potențialului și câmpului în cazul sferelor tangente exterior și de raze diferite .....	76
5.2.4. Expresia potențialului și câmpului în cazul sferelor tangente exterior și de raze egale .....	77
5.3. Folosirea modelului pentru testarea unor metode numerice .....	78
5.4. Concluzii .....	79
<b>Bibliografie</b> .....	79
<b>6. Aplicarea modelului electrostatic la prizele de pământ sferice</b> .....	80
6.1. Metode de calcul în teoria prizelor de pământ .....	80
6.2. Rezistența de trecere a sferei îngropate la adâncimea $h$ . Formula clasică aproximativă determinată cu metoda directă .....	83
6.3. Rezistența de trecere a sferei îngropate la adâncimea $h$ . Formula exactă .....	85
6.4. Compararea formulei exacte cu cele două formule aproximative .....	88
6.5. Observații referitoare la calculul rezistenței de trecere a prizei de pământ a unui stâlp .....	92
6.6. Aplicație referitoare la măsurarea unei prize de pământ .....	96
6.7. Calculul exact al potențialului la suprafața solului și a tensiunii de pas .....	98
6.7.1. Distribuția potențialului și a tensiunii de pas la suprafața solului în cazul prizei îngropate la adâncimea $h$ (calcul în varianta clasică) .....	98
6.7.2. Distribuția potențialului și a tensiunii de pas la suprafața solului în cazul prizei îngropate la adâncimea $h$ (calculul cu metoda exactă) .....	101

6.7.3. Compararea formulei exacte cu formulele aproximative în cazul potențialului la suprafața solului și a tensiunii de pas .....	104
6.8. Concluzii .....	110
<b>Bibliografie</b> .....	110
<b>7. Sinteza imaginilor electrice pentru suprafețe conductoare cu simetrie plan meridiană. Aplicații pentru suprafețe sferice</b> .....	112
7.1. Baza matematică a metodelor de sinteză folosite.....	113
7.1.1. Regularizarea sistemelor degenerate și pseudosoluția normală ...	113
7.1.2. Metoda coeficienților binomiali.....	116
7.1.3. Formula de calcul a pseudosoluției normale.....	117
7.1.4. Aplicarea metodei coeficienților binomiali la evaluarea parametrului de regularizare.....	120
7.2. Forma generală pentru modelul fizic și modelul numeric al problemei de sinteză a imaginilor.....	121
7.2.1. Principiul metodei de sinteză.....	122
7.3. Determinarea prin sinteză a sarcinilor imagine pentru o sferă conductoare.....	123
7.4. Determinarea prin sinteză a sarcinilor imagine pentru o sferă conductoare legată la pământ în prezența unei sarcini punctiforme .....	131
7.5. Determinarea prin sinteză a sarcinilor imagine pentru o sferă conductoare izolată în prezența unei sarcini punctiforme .....	135
7.6. Verificarea prin sinteză a valorilor sarcinilor imagine pentru două sfere conductoare exterioare (cu valori prestabilite a poziției).....	137
7.6.1. Metoda de sinteză prin inversare directă .....	139
7.6.2. Determinarea sarcinilor imagine prin regularizare Fredholm..	141
7.6.3. Metoda de sinteză în cazul sistemului supradeterminat.....	144
7.7. Concluzii .....	146
<b>Bibliografie</b> .....	146
<b>8. Sinteza imaginilor electrice pentru suprafețe conductoare cu simetrie plan meridiană. Aplicații pentru suprafețe cilindrice</b> .....	148
8.1. Determinarea prin sinteză a sarcinilor imagine pentru un cilindru conductor .....	148

8.2. Capacitatea cilindrului conductor.....	153
8.3. Precizia formulei capacității unei antene.....	155
8.4. Formule liniare pentru capacitatea cilindrului conductor.....	158
8.5. Sarcinile imagine și capacitatea pentru doi cilindri de rotație aflați la același potențial.....	160
8.6. Precizia de calcul a formulei pentru rezistența de trecere a unei prize de pământ de formă cilindrică îngropată vertical la adâncimea h .....	165
8.7. Analiza performanțelor unor dispozitive pentru separatoare electrostatice .....	169
8.7.1. Datele instalației de separare de analizat .....	170
8.7.2. Calculul câmpului determinat de sarcinile imagini .....	171
8.7.3. Calculul forței determinate de sarcinile imagini.....	174
8.8. Concluzii .....	177
<b>Bibliografie</b> .....	178
<b>Bibliografie în ordine alfabetică după autori</b> .....	180
Anexe sinteză Mathcad .....	186
Anexe programe în limbaj C++ .....	260

## 1. INTRODUCERE

Lucrarea are ca obiect studiul câmpului electric în regim static și staționar pentru dispozitive conductoare, adică analiza și sinteza de câmp. Metodele folosite, inversiunea geometrică și transformata Kelvin, incluzând sarcinile electrice imagine, sunt tipice pentru acest gen de probleme și sunt numite în carte „metode speciale”.

### 1.1. PROBLEMA ANALIZEI CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Analiza câmpului electromagnetic presupune determinarea mărimilor de stare ale câmpului electric, adică vectorii câmp electric  $\mathbf{E}$  și inducție electrică  $\mathbf{D}$  și ale câmpului magnetic, adică vectorii câmp magnetic  $\mathbf{H}$  și inducție magnetică  $\mathbf{B}$  într-un anumit domeniu al spațiului.

Problema analizei este bine determinată, adică are soluție unică atunci când modelul fizic al problemei este corect ales și mărimile sunt precis măsurate.

Această soluție unică se poate găsi în cazul în care sunt cunoscute în interiorul fiecărui punct al domeniului spațial considerat și precizat următoarele mărimi, care în literatura de specialitate [1.1], [1.2], [1.3] se numesc „condiții”, pentru că ele condiționează unicitatea: condițiile de material (permitivitatea electrică, permeabilitatea magnetică, conductivitatea electrică), condițiile de viteză (pentru medii mobile), condițiile inițiale (adică valorile câmpului electric și magnetic la un anumit moment considerat moment inițial), condițiile la limită (adică valorile componente tangențiale ale câmpului electric sau magnetic la frontiera domeniului în fiecare moment, ceea ce reprezintă legătura domeniului dat cu exteriorul) și condițiile de surse (adică densitatea de volum și superficială a sarcinii electrice, densitatea de curent și a pânzei de curent, polarizația permanentă, inducția remanentă și câmpul imprimat).

Precizarea acestor condiții constituie prima etapă în rezolvarea unei probleme de analiză de câmp electromagnetic și se numește etapa de stabilire a modelului fenomenologic.

Urmează etapa de reflectare în plan formal a modelului considerat pe baza sistemului de ecuații ale lui Maxwell pentru medii imobile și, respectiv, Maxwell-Hertz, pentru medii mobile. Aceasta este etapa de realizare a modelului matematic, care poate fi diferențial (dacă legile sunt folosite sub forma locală a operatorilor vectoriali), variațional (dacă se introduce o funcțională a cărei minimizare să fie echivalentă cu ecuațiile câmpului) sau integral (dacă legile câmpului sunt folosite sub forma lor integrală).

Ultima etapă este cea de rezolvare a modelului matematic ales. Metoda de rezolvare poate fi analitică sau numerică.

Metoda analitică este precisă, dar numărul cazurilor practice în care se poate aplica este destul de limitat presupunând liniaritatea operatorului, precum și o anumită simetrie [1.4]. De regulă, se aplică metoda separării variabilelor, care duce la rezolvarea unor ecuații diferențiale specifice fiecărui tip de simetrie, respectiv fiecărui tip de sistem de coordonate (ecuații diferențiale cu coeficienți constanți pentru simetrii carteziene, ecuații de tip Euler, respectiv Bessel, pentru simetrii cilindrice și ecuații de tip Euler și Legendre pentru simetrii sferice).

Tot în cadrul metodelor analitice se încadrează și metodele pe care le numim speciale. De notat că metodele speciale presupun și o importantă latură numerică.

Metoda numerică se poate aplica practic nelimitat. Metoda numerică este adaptată modelului matematic. Astfel: pentru modelul diferențial se aplică metoda diferențelor finite, pentru modelul variațional se aplică metoda elementului finit, iar pentru modelul integral se aplică metoda elementului de frontieră.

Modelul matematic împreună cu metoda numerică de rezolvare formează modelul numeric al problemei de analiză.

În cazul particular al câmpului electric în regim static și staționar, toate considerațiile de mai sus rămân valabile cu adaptările și simplificările de rigoare.

## 1.2. PROBLEMA SINTEZEI CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Sinteza câmpului electromagnetic este problema inversă a analizei [1.5]. Bazele matematice ale sintezei de câmp au fost puse în prima parte a deceniului al șaptelea din secolul trecut [1.6], [1.7], [1.8], dar aplicațiile în teoria câmpului electromagnetic apar abia după două decenii. Remarcăm că înainte ca bazele teoretice ale sintezei să fie puse, un mare profesor al electrotehnicii românești, academicianul Andrei Țugulea, publică o lucrare în care fundamentează metoda sintezei analitice [1.9].

În problema sintezei se impune câmpul electromagnetic într-o anumită parte a domeniului sau în tot domeniul, iar condițiile numite anterior de unicitate se dau parțial. Important de menționat că până și domeniul spațial se poate da parțial în problema sintezei.

Etapele de rezolvare ale problemei sunt aceleași ca și în cazul analizei, dar unele din datele problemei devin necunoscute și invers.



Aplicarea metodei de sinteză duce la o ecuație integrală de ordinul întâi, numită ecuație Fredholm, care are un mod specific de rezolvare [1.5]. Se demonstrează că orice problemă care se poate aduce la o ecuație Fredholm se poate transforma într-un sistem de ecuații degenerare [1.10], care se poate rezolva prin regularizare.

Regularizarea este o metodă care cântărește balansul dintre precizie și realizabilitate sau stabilitate. Apare în toate cazurile dilema exprimată plastic prin aceea că a urca în precizie e la fel cu a urca într-un copac, știind că sus ramurile sunt mai subțiri și vântul bate mai tare, deci stabilitatea scade.

Teoria sintezei presupune unele noțiuni, precum numărul de condiționare [1.11], sau chestiuni de teoria erorii în cazul calculului automat [1.12].

Este important din punctul de vedere al temei noastre să arătăm care sunt tipurile de sinteză întâlnite în practica rezolvării problemelor de acest fel. Avem astfel sinteza de proiectare [1.13], care presupune realizarea unor caracteristici ce se pot echivala cu proprietăți ale unor câmpuri electromagnetice, sinteza de identificare, care presupune verificarea proprietăților unui dispozitiv aflat în stare de funcționare după unele remedieri, sinteza de optimizare, care presupune realizarea unor câmpuri cu anumite proprietăți, supuse unor restricții [1.14], și, în sfârșit, sinteza de surse, care presupune realizarea unor proprietăți prin introducerea unor surse de câmp, aceste surse fiind cele cunoscute și prezentate la problema analizei.

Un alt aspect al sintezei îl constituie rezolvarea sistemelor degenerare sau rău condiționate fără a folosi regularizarea, respectiv prin impunerea soluției de eroare minimă, adică a pseudosoluției. În lucrare, se va folosi calculul pseudosoluției de normă minimă, adică a pseudosoluției normale prin metoda coeficienților binomiali, metodă prezentată în premieră în [1.5].

### **1.3. METODE SPECIALE ÎN ANALIZA ȘI SINTEZA CÂMPULUI ELECTRIC ÎN REGIM STATIC ȘI STAȚIONAR**

Precizăm că noțiunea de metode speciale nu este uzuală în teoria câmpului electromagnetic. Am introdus această noțiune pentru a desemna unele metode de analiză și sinteză analitică diferite de cele clasice.

Ne referim la metoda transformatei Kelvin, la metoda inversiunii geometrice și la metoda imaginilor electrice. Din combinarea acestor metode se vor obține rezultate teoretice originale, cu aplicații la calculul

exact al rezistențelor de trecere ale prizelor de pământ [1.15], la realizarea unor modele nebanale de testare pentru calcule numerice, precum și la separatoarele electrostatice.

Regimul de variație în timp a mărimilor este în primă instanță regim static, după care, pe baza analogiei cu regimul electrocinetic, regimul se va extinde la cel staționar.

Precizăm că aceste metode – numite de noi speciale – au o vechime mai mare chiar decât legile lui Maxwell [1.16], (1862).

## 1.4. ISTORIC AL METODELOR SPECIALE

Menționăm că informațiile la care am avut acces, referitoare la evoluția istorică a metodelor, și numite de noi speciale, sunt uneori contradictorii.

Referitor la transformarea prin inversiune geometrică, se pare că primul care a folosit-o este Apollonios din Perga (240 î.Hr. – 190 î.Hr.) în cartea *Conice*, care s-a păstrat sub forma unei traduceri în arabă din secolul al IX-lea [1.17]. După alte surse [1.18], meritul pentru inventarea acestei frumoase metode îi aparține lui L.I. Magnus, care a folosit-o prima dată în 1823. Un articol dedicat tocmai originii principiului geometric al inversiunii [1.19] îl creditează pe matematicianul elvețian J. Steiner cu meritul de a fi inventat metoda în 1824. Autorul menționează că au existat și alți matematicieni care au utilizat metoda inversiunii sub diferite forme înainte de Steiner.

Metoda imaginilor electrice îl are ca precursor pe Gauss (1818) [1.20].

Transformata Kelvin a fost inventată de William Thomson, Lord Kelvin (1824 – 1907) în anul 1845, [1.21]. El a arătat că, în anumite condiții, prin transformarea prin inversiune se păstrează o serie de proprietăți electrice și a introdus, în consecință, tehnica respectivă, care-i poartă numele.

Dacă transformata prin inversiune este inclusă în mod intrinsec în transformata Kelvin, metoda imaginilor este doar un auxiliar al acesteia.

## 1.5. STADIUL ACTUAL AL PREOCUPĂRILOR ÎN DOMENIUL METODELOR SPECIALE

Deși metoda transformatei Kelvin, bazată pe inversiunea geometrică, are o vechime considerabilă, ea continuă să fie folosită de cercetători, domeniile de aplicare fiind din ce în ce mai vaste.

În scrisoarea către matematicianul francez Liouville [1.21], referindu-se la o discuție anterioară avută cu acesta referitoare la principiul metodei imaginilor, Kelvin spune: „Există o mulțime de probleme la care eu nu m-am gândit atunci și am găsit mai târziu că principiul imaginilor se poate aplica”. Afirmatia lui Kelvin este reluată, de atunci, de mulți cercetători (până în zilele noastre), putând constitui un motto pentru orice lucrare care aplică transformata Kelvin.

Considerăm că publicațiile recente se orientează pe două direcții importante.

Prima direcție se referă la pana conductoare (*conducting wedge*), prin care se înțelege un dispozitiv conductor cuprins între două plane conductoare infinite.

Practic, acest tip de configurație apare în numeroase aplicații din electrostatică, hidrodinamică și regimuri de variație de joasă frecvență.

Problema determinării potențialului și a câmpului în prezența unei sarcini punctiforme numite sursă a fost rezolvată analitic cu mult timp în urmă [1.22], dar a fost reluată recent și pusă sub o formă convenabilă în [1.23]. Dezavantajul acestei formule este că prezintă singularități în punctele din vârful penei conductoare. În [1.24] și [1.25], acest inconvenient este înlăturat prin aplicarea transformatei Kelvin. Prin alegerea convenabilă a polului transformării, problema penei conductoare este transformată în problema sferelor intersectate.

Problema singularității, legată de punctele de pe dreapta de intersecție a planelor care mărginesc pana (punctele din vârful penei), este legată de distanța la care se află sarcina sursă față de aceste puncte. Mai mult, dacă sursa trece în regim dinamic, adică variabil în timp, această distanță este legată și de lungimea de undă generată de sursă. Aceste aspecte sunt abordate în [1.26] și generalizate pentru mai multe pene conductoare în [1.27]. Trecerea la regimul dinamic se face considerând intervale de timp suficient de mici și regimul dinamic, ca o succesiune de regimuri statice.

O idee interesantă care subliniază importanța regimului static apare în [1.28]. Se afirmă că la o anumită scalare, suficient de mică, mai mică decât lungimea de undă, orice problemă din natură poate fi considerată statică sau cvasistatică, deci orice soluție exactă din electrostatică va avea imediat un corespondent în câmp electromagnetic variabil.

A doua direcție se referă la stabilirea unor soluții analitice pentru probleme bine determinate cu ajutorul transformatei Kelvin și a metodei imaginilor. În marea majoritate, aceste soluții se folosesc pentru determinarea așa-numitei polarizabilități, definită ca raportul dintre momentul unui dipol

și câmpul care induce sarcinile dipolare într-un anumit volum conductor. Polarizabilitatea se calculează, în general, pe două direcții perpendiculare și se folosește pentru determinarea câmpului în soluții cu rare incluziuni metalice. Această direcție este ilustrată de titlurile [1.29]-[1.33].

Aplicațiile sunt din domeniul proiectării materialelor compozite, a măsurărilor nedistructive, geofizică etc.

Modelul fizic este, cu mici deosebiri, același, și anume este vorba de două sfere conductoare aflate în prezența unei sarcini exterioare legate la pământ, care se intersectează ortogonal. În [1.29], se demonstrează vectorial că imaginile electrice corespunzătoare sunt exact trei, și anume imaginea față de prima sferă – ca și cum cealaltă nu ar exista –, apoi, imaginea față de a doua sferă – ca și cum prima nu ar exista – și, în sfârșit, a treia, care este imaginea simetricului sarcinii date față de planul radical în raport cu sfera care are ca cerc mare cercul de intersecție al sferelor date. O demonstrație pur geometrică este dată pe baza transformatei Kelvin în [1.34]. Este interesant de menționat că, între valorile sarcinii date și cele trei imagini, există o relație a cărei interpretare fizică nu este încă cunoscută. Putem spune că domeniul metodelor speciale oferă încă probleme deschise, deci, domeniul nu este finalizat și încheiat nici măcar din punct de vedere teoretic.

Acest rezultat remarcabil este folosit și în [1.31] și [1.32], dar fără demonstrație. După determinarea sarcinilor imagine, se poate calcula polarizabilitatea. Incluziunile metalice se asimilează cu două sfere care se intersectează sau cu două sfere exterioare [1.30]. În [1.33], se extinde teoria lui Kelvin la materiale dielectrice și la câmpul magnetic static.

Metodele speciale au un avantaj față de metodele clasice de analiză de câmp, și anume ele dau soluția sub formă algebrică exactă [1.34] sau sub forma unei serii convergente. Aceste avantaje au fost prezentate de Kelvin în [1.21], dar sunt valabile și astăzi.

## 1.6. CONCLUZII

Tema cărții se încadrează în problematica mai largă a analizei și sintezei câmpului electromagnetic. În lucrare, se tratează chestiuni legate exclusiv de câmpul electric în regimul particular static și staționar. Problema analizei are soluție unică atunci când anumite condiții sunt satisfăcute. Problema sintezei nu este în general bine determinată din punct de vedere matematic și poate avea mai multe soluții, din care se alege cu anumite metode cele corespunzătoare din punct de vedere tehnic.

Prin metode speciale, autorii înțeleg metoda transformatei Kelvin, metoda inversiunii geometrice și metoda imaginilor electrice, metode care se întrepătrund și se condiționează reciproc.

Deși metodele speciale au o lungă istorie în spate, lucrările recente citate care folosesc aceste metode, (printre care o teză de doctorat din 2006, o carte din 2016), dovedesc că aceste metode sunt actuale. Dintre cele două mari direcții actuale de cercetare identificate pe baza literaturii consultate considerăm că lucrarea noastră se încadrează ca și problematică la direcția a doua, cu note specifice care o particularizează. Principala particularitate constă în faptul că lucrarea noastră presupune suprafețe echipotențiale în timp ce majoritatea lucrărilor consideră conductoarele în prezența unei sarcini exterioare.

## BIBLIOGRAFIE

1.1. Mîndru, Gh., Rădulescu, M.M., *Analiza numerică a câmpului electromagnetic*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1986

1.2. Răduleț, R., *Bazele fizice ale Electrotehnicii*, Lito Politehnica București, 1955

1.3. Hănțilă, F.I., Demeter, E., *Rezolvarea numerică a problemelor de câmp electromagnetic*, Editura Ari Press, București, 1995

1.4. Țugulea, A., *Câmpul electromagnetic*, Editura Tehnică, București, 1983

1.5. Micu, D., Micu Adriana, *Elemente de sinteza câmpului electromagnetic*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2003

1.6. Tihonov, A.N., Arsenin, V.,I., *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Édition MIR, Moscou, 1974

1.7. Phillips, D.L., *A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind*, J. Assoc. Comp. Mach. 9,1962

1.8. Twomey, S., *On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature*, J. Assoc. Comp. Mach. 10,1963

1.9. Țugulea, A., *Câteva sinteze de câmp magnetic în regim staționar*. Studii și cercetări energetice și electrotehnice, Tom 14, nr.4, București, 1964

1.10. Micu, D., *Contributions à la synthèse du champ électromagnétique par la méthode de régularisation des systèmes dégénérés*, Revue roumaine des sciences techniques, série E.E, tome 38, vol.2, p.169-179, Bucarest, 1993

## **2. TRANSFORMATĂ KELVIN, METODĂ DE ANALIZĂ A CÂMPULUI ELECTROSTATIC**

Transformata Kelvin [2.1] este o metodă specifică pentru studiul câmpului electromagnetic în regim static și în regim staționar electrocinetic.

Prin această metodă, se face transformarea unui spațiu în alt spațiu din punct de vedere geometric. Sarcinile electrice cu care sunt încărcate corpurile în primul spațiu suferă și ele modificări în cursul transformării. Evident că și potențialele și câmpurile electrice își schimbă proprietățile [2.2].

Transformata Kelvin este strâns legată de transformarea geometrică prin inversiune în plan real și de metoda imaginilor electrice, pentru că transformarea spațiului se face cu metoda inversiunii geometrice, iar transformarea densităților de sarcină este legată de metoda imaginilor.

Considerăm utilă prezentarea unor elemente din teoria transformării Kelvin pentru mai buna încadrare a elementelor aplicative din capitolele următoare.

### **2.1. TRANSFORMATĂ SPAȚIULUI**

Transformarea spațiului se face prin inversiune, o transformare geometrică utilă și spectaculoasă.

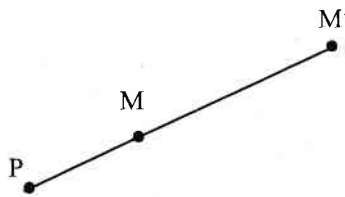
Prin această transformare, spațiul din exteriorul unei sfere se transformă în spațiul din interiorul sferei respective. În anumite condiții, suprafețele plane se pot transforma în suprafețe sferice și invers, ceea ce poate duce la rezolvări surprinzătoare ale unor probleme dificile.

Inversiunea se poate folosi și în planul complex, dar pentru studiul câmpului electrostatic se folosește numai inversiunea în plan real. Inversiunea în complex este utilă la studiul circuitelor electrice în regim permanent sinusoidal [2.3].

#### **2.1.1. DEFINIȚIA INVERSIUNII GEOMETRICE**

Inversiunea geometrică [2.4]-[2.8] reprezintă o transformare punctiformă în care, fiind dat un punct fix  $P$ , numit pol, și un număr real  $k$ , numit puterea inversiunii, unui punct  $M$  i se atașează un punct  $M'$  aparținând semidreptei  $PM$ , astfel încât

$$PM \cdot PM' = k \quad (2.1)$$



**Fig.2.1.** Inversul  $M'$  al unui punct  $M$  în plan real

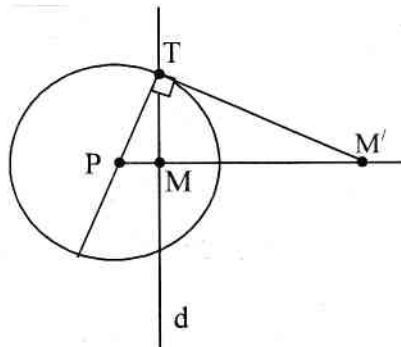
Se observă că dacă puterea inversiunii  $k$  este un număr pozitiv, atunci  $M' \in PM$ ; iar dacă este negativ, atunci  $M' \in MP$ .

Precizăm că, în aplicațiile inversiunii în teoria câmpului electrostatic, puterea inversiunii este un număr real pozitiv, motiv pentru care în demonstrațiile care urmează vom considera  $k > 0$ .

## 2.1.2. DETERMINAREA GEOMETRICĂ A PUNCTULUI INVERS

Etapele de determinare a punctului invers  $M'$  sunt următoarele, [2.4]:

Se trasează un cerc  $C$  cu originea în polul  $P$  și raza egală cu  $\sqrt{k}$  (cercul  $C$  este numit cerc de inversiune). Punctul  $M$  poate fi în interiorul sau în exteriorul cercului de inversiune. Considerăm pentru început că  $M$  se află în interior, fig. 2.2. Se unește printr-o semidreaptă punctul  $P$  cu punctul  $M$ . Din punctul  $M$  se ridică o perpendiculară  $d$  pe semidreapta  $PM$ , care intersectează cercul  $C$  în punctul  $T$ . În punctul  $T$  se duce tangenta la cerc până când aceasta intersectează semidreapta  $PM$ ; Intersecția dintre semidreapta ( $PM$  și tangenta la cerc în punctul  $T$ ) reprezintă inversul punctului  $M$ , notat cu  $M'$ .



**Fig. 2.2.** Construcția geometrică a punctului invers,  $M$  în interior